INSTITUTO NACIONAL DE ESTADISTICA

Anexo.
Ejemplos prácticos sobre números índices

Índice

Anexo I: Ejemplos prácticos sobre números índices

1 Índices espaciales e Índices temporales

Índices espaciales: La siguiente tabla muestra la evolución de los índices de las Paridades de Poder Adquisitivo (PPA) de 39 países.

Su interpretación es la siguiente: Considerando el conjunto de los 28 países de la Unión Europea (UE) como referencia (el índice es igual a 100), los países cuyo índice se sitúe por encima de ese nivel se considera que tienen un nivel de precios mayor que la media de la UE, mientras que aquellos cuyo índice sea inferior a 100, tienen sus niveles generales de precios por debajo de la media de la UE.

Es preciso destacar que, aunque la tabla representa una evolución temporal, esto no quiere decir que los índices lo sean, sino que se trata de una evolución en el tiempo de índices espaciales. Así, vemos, por ejemplo, que España ha evolucionado desde un índice cercano a 98 en el año 2009 (es decir, sus precios estaban un 2% por debajo de la media de la UE) a un índice cercano a 95 (un cinco por ciento por debajo de la media UE). La interpretación de esta disminución debe realizarse desde el punto de vista del país en cuestión (España), donde posiblemente los precios hayan disminuido en estos años, pero también desde la parte del resto de países de la UE, ya que un aumento de precios en estos países hace que el índice de las PPA en España se reduzca aunque los precios en España no se hayan modificado.

Tabla comparativa de niveles de precios de UE

	2009	2010	2011	2012
EU (28 countries)	**100**	**100**	**100**	**100**
Euro area (17 countries)	**105,8**	**103,2**	**103,2**	**102,1**
Belgium	112,3	110,2	109,6	108,6
Bulgaria	51,3	50,0	48,8	48,3
Czech Republic	73,1	74,6	75,6	72,2
Denmark	143,0	140,4	142,6	140,5
Germany	107,0	103,5	102,0	101,1
Estonia	77,3	74,8	75,9	76,9
Ireland	125,6	118,1	118,7	117,0
Greece	95,0	94,5	94,5	92,1
Spain	97,7	96,6	96,9	94,9
France	112,2	110,1	109,7	108,1
Croatia	76,3	75,2	73,0	69,9
Italy	104,8	101,2	102,9	102,5
Cyprus	89,8	88,7	88,7	87,4
Latvia	76,0	70,0	71,2	71,6
Lithuania	67,0	63,6	64,5	63,9
Luxembourg	121,5	122,3	123,3	122,1
Hungary	63,2	63,0	61,5	60,3
Malta	78,0	77,4	78,4	77,8
Netherlands	107,9	107,8	108,4	107,6
Austria	107,9	105,1	105,7	105,5
Poland	58,1	60,4	58,6	56,7
Portugal	89,2	87,4	87,8	85,9
Romania	57,5	57,4	58,8	55,4
Slovenia	87,9	86,1	84,9	82,9
Slovakia	73,2	70,3	70,7	70,4
Finland	124,0	121,7	122,2	121,7
Sweden	107,6	119,7	125,7	128,6
United Kingdom	96,8	107,8	108,7	116,5
Iceland	100,3	105,2	107,3	109,2
Norway	139,4	150,4	156,7	158,8
Switzerland	137,6	148,0	163,2	159,9
Montenegro	60,0	57,2	56,0	55,7
Former Yugoslav Republic of Macedonia, the	45,3	44,8	46,5	46,5
Serbia	55,7	52,4	55,5	51,2
Turkey	63,3	69,8	62,1	65,9
Albania	51,3	52,6	51,5	51,0
Bosnia and Herzegovina	57,5	55,7	55,3	53,6
United States	89,5	92,9	89,6	95,7
Japan	119,7	128,0	130,5	136,0

2 Índices simples y sus propiedades

- **HOMOGENEIDAD**

Supongamos una cesta de la compra de un IPC con tres artículos. El primero está medido en kilos, el segundo en litros y el tercero representa el precio de una unidad:

PRODUCTO	Precio 0	Unidad	Precio m	Unidad	Índice	Unidad
Pescado	13	Kg	14	Kg	107,69	Adimensional
Leche	0,9	Litro	1,1	Litro	122,22	Adimensional
Coche	20.000	Unidad	19.000	Unidad	95,00	Adimensional

El cálculo de los respectivos índices simples se realizaría como cocientes de los precios del mes corriente *m* y el precio del año base:

Pescado: $I^{m}_{pescado} = \frac{14 euros / Kg}{13 euros / Kg} * 100 = 107,69$

Leche: $I^{m}_{leche} = \frac{1,1 euros / l}{0,9 euros / l} * 100 = 122,22$

Coche: $I^{m}_{coche} = \frac{19.000 euros / unidad}{20.000 euros / unidad} * 100 = 95,00$

Vemos cómo las magnitudes resultantes son adimensionales, y por tanto es posible su agregación ya que desaparece la heterogeneidad debida a la unidad de medida.

- **IDENTIDAD**

Continuando con el ejemplo, los respectivos índices en el año base se calculan como sigue:

Pescado: $I^{m}_{pescado} = \frac{13 euros / Kg}{13 euros / Kg} * 100 = 100,00$

Leche: $I^{m}_{leche} = \frac{0,9 euros / l}{0,9 euros / l} * 100 = 100,00$

Coche: $I_{coche}^{m} = \dfrac{20.000 euros / unidad}{20.000 euros / unidad} * 100 = 100,00$

Por definición, los índices se calculan dividiendo la magnitud del periodo corriente entre la del año base. En el año base, el periodo corriente es el propio año base por lo que su índice ha de ser 100.

Cambio de periodo base: Si queremos cambiar la referencia del índice, haciendo que el nuevo año base sea el periodo m, basta con considerar en el denominador de las fórmulas las magnitudes de dicho periodo. Así, los índices del antiguo periodo base (0) sería ahora:

Pescado: $I_{pescado}^{0} = \dfrac{13 euros / Kg}{14 euros / Kg} * 100 = 92,86$

Leche: $I_{leche}^{0} = \dfrac{0,9 euros / l}{1,1 euros / l} * 100 = 81,82$

Coche: $I_{coche}^{0} = \dfrac{20.000 euros / unidad}{19.000 euros / unidad} * 100 = 105,26$

Vemos que se trata de una simple conversión aritmética que tiene como objetivo cambiar el año de referencia (estableciendo sus índices igual a 100) manteniendo la tasa de variación de los precios inalterable entre ambos periodos:

PRODUCTO	**Índice 0**	**Índice m**	**Variación**
Pescado	100,00	107,69	7,69%
Leche	100,00	122,22	22,22%
Coche	100,00	95,00	-5,00%

PRODUCTO	**Índice 0**	**Índice m**	**Variación**
Pescado	92,86	100,00	7,69%
Leche	81,82	100,00	22,22%
Coche	105,26	100,00	-5,00%

- **REVERSIBILIDAD**

En el mismo ejemplo, se puede apreciar cómo se cumple la propiedad de la reversibilidad. En la primera columna están calculados los índices del periodo *t* en base 0, la segunda contiene los índices en base *t* del periodo *0* (todos ellos se han considerado sin multiplicar por 100 para facilitar los cálculos). La inversa del índice en base *t* está calculada en la última columna, que demuestra que es igual a los respectivos índices en base 0.

PRODUCTO	Índice 0,t	Índice t,0	1/índice t,0
Pescado	1,0769	0,9286	1,0769
Leche	1,2222	0,8182	1,2222
Coche	0,9500	1,0526	0,9500

- **TRANSITIVIDAD**

Consideremos un nuevo periodo *m+1* con los siguientes precios:

PRODUCTO	Precio 0	Precio m	Precio m+1
Pescado	13	14	16
Leche	0,9	1,1	0,8
Coche	20.000	19.000	15.000

Calculemos los índices del periodo *m*, en base *0* (columna (1)), y del periodo *m+1*, en base *m* (columna (2)). Como se aprecia en la siguiente tabla, el producto de ambos es igual al índice del periodo *m+1,* en base *0*.

PRODUCTO	Índice 0,m (1)	Índice m, m+1 (2)	(1)x(2)	Índice 0, m+1
Pescado	1,0769	1,1429	1,2308	1,2308
Leche	1,2222	0,7273	0,8889	0,8889
Coche	0,9500	0,7895	0,7500	0,7500

- **PROPORCIONALIDAD**

Supongamos ahora que los precios del periodo corriente m son tres veces los precios del periodo base, en todos los artículos. Vemos entonces que sus respectivos índices representan precisamente esa proporción (son igual a 3).

PRODUCTO	Precio 0	Precio m	Índice
Pescado	13	39	3,0
Leche	0,9	2,7	3,0
Coche	20.000	60.000	3,0

3 Fórmulas de agregación de índices de precios

Supongamos una cesta de la compra con cuatro productos. Para cada uno de estos productos disponemos de sus precios de venta y las cantidades vendidas entre los meses 1 al 4.

Consideremos el mes 1 como el mes base, es decir, el mes que utilizarán como referencia las distintas fórmulas de cálculo de índices. Este periodo lo hemos señalado en amarillo.

	PRECIOS				CANTIDADES			
	MES 1	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**	**MES 1**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	324	315	310	322	15	22	27	10
PRODUCTO 2	18	20	20	24	420	400	502	480
PRODUCTO 3	112	120	123	130	57	60	66	80
PRODUCTO 4	1.214	1.210	1.120	1.100	8	8	8	10

A continuación se detalla el cálculo de los principales índices utilizando esta información de partida.

1) ÍNDICE DE BÖWLEY

$$I_B = \frac{\sum p_i^t \times \left((1-\mu)\times q_i^0 + \mu \times q_i^t\right)}{\sum p_i^0 \times \left((1-\mu)\times q_i^0 + \mu \times q_i^t\right)}$$

Consideremos que μ es 0,7 y, por tanto $(1-\mu)$ es 0,3:

	NUMERADOR			DENOMINADOR		
	MES 2	**MES 3**	**MES 4**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	6268,5	7254	3703	6447,6	7581,6	3726
PRODUCTO 2	8120	9548	11088	7308	8593,2	8316
PRODUCTO 3	7092	7785,9	9503	6619,2	7089,6	8187,2
PRODUCTO 4	9680	8960	10340	9712	9712	11411,6
SUMA	31160,5	33547,9	34634	30086,8	32976,4	31640,8

ÍNDICES	***103,569***	***101,733***	***109,460***
TASAS		***-1,8%***	***7,6%***

2) ÍNDICE DE LASPEYRES

$$I_L = \frac{\sum p_i^t \times q_i^0}{\sum p_i^0 \times q_i^0}$$

	NUMERADOR			DENOMINADOR		
	MES 2	**MES 3**	**MES 4**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	4725	4650	4830	4860	4860	4860
PRODUCTO 2	8400	8400	10080	7560	7560	7560
PRODUCTO 3	6840	7011	7410	6384	6384	6384
PRODUCTO 4	9680	8960	8800	9712	9712	9712
SUMA	29645	29021	31120	28516	28516	28516

ÍNDICES	***103,959***	***101,771***	***109,132***
TASAS		***-2,1%***	***7,2%***

3) ÍNDICE DE PAASCHE

$$I_P = \frac{\sum p_i^t \times q_i^t}{\sum p_i^0 \times q_i^t}$$

	NUMERADOR			DENOMINADOR		
	MES 2	**MES 3**	**MES 4**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	6930	8370	3220	7128	8748	3240
PRODUCTO 2	8000	10040	11520	7200	9036	8640
PRODUCTO 3	7200	8118	10400	6720	7392	8960
PRODUCTO 4	9680	8960	11000	9712	9712	12140
SUMA	31810	35488	36140	30760	34888	32980

ÍNDICES	***103,414***	***101,720***	***109,582***
TASAS		***-1,6%***	***7,7%***

4) ÍNDICE DE EDGEWORTH

$$I_E = \frac{\sum p_i^t \times (q_i^0 + q_i^t)}{\sum p_i^0 \times (q_i^0 + q_i^t)}$$

	NUMERADOR			DENOMINADOR		
	MES 2	**MES 3**	**MES 4**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	5827,5	6510	4025	5994	6804	4050
PRODUCTO 2	8200	9220	10800	7380	8298	8100
PRODUCTO 3	7020	7564,5	8905	6552	6888	7672
PRODUCTO 4	9680	8960	9900	9712	9712	10926
SUMA	30727,5	32254,5	33630	29638	31702	30748

ÍNDICES	***103,676***	***101,743***	***109,373***
TASAS		***-1,9%***	***7,5%***

5) ÍNDICE DE BRADSTREST-DUDOT

$$I_{BD} = \frac{\sum p_i^t}{\sum p_i^0}$$

	NUMERADOR			DENOMINADOR		
	MES 2	**MES 3**	**MES 4**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	315	310	322	324	324	324
PRODUCTO 2	20	20	24	18	18	18
PRODUCTO 3	120	123	130	112	112	112
PRODUCTO 4	1210	1120	1100	1214	1214	1214
SUMA	1665	1573	1576	1668	1668	1668

ÍNDICES	***99,820***	***94,305***	***94,484***
TASAS		***-5,5%***	***0,2%***

6) ÍNDICE DE SAUERBECK

$$I_S = \frac{1}{n} \sum I_i$$

	MES 2	MES 3	MES 4
PRODUCTO 1	97,222	95,679	99,383
PRODUCTO 2	111,111	111,111	133,333
PRODUCTO 3	107,143	109,821	116,071
PRODUCTO 4	99,671	92,257	90,610
SUMA	415,147	408,869	439,397

ÍNDICES	***103,787***	***102,217***	***109,849***
TASAS		***-1,5%***	***7,5%***

7) ÍNDICE DE LOWE

$$I_{LW} = \frac{\sum p_i^t \times q_i^\tau}{\sum p_i^0 \times q_i^\tau}$$

El índice de Lowe utiliza información sobre cantidades de un mes intermedio entre el base y el momento actual. Supongamos que consideramos el mes 2 como periodo intermedio. EL resultado es el siguiente:

	NUMERADOR		DENOMINADOR	
	MES 3	**MES 4**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	6820	7084	7128	7128
PRODUCTO 2	8000	9600	7200	7200
PRODUCTO 3	7380	7800	6720	6720
PRODUCTO 4	8960	8800	9712	9712
SUMA	31160	33284	30760	30760

ÍNDICES	***101,300***	***108,205***
TASAS		***6,8%***

8) ÍNDICE DE FISHER

El índice de Fisher se calcula como media geométrica de los índices de Laspeyres y de Paasche:

$$I_F = \sqrt{I_P \times I_L}$$

ÍNDICE DE LASPEYRES

	MES 2	MES 3	MES 4
ÍNDICES	103,959	101,771	109,132
TASAS		-2,1	7,2

ÍNDICE DE PAASDHE

	MES 2	MES 3	MES 4
ÍNDICES	103,414	101,720	109,582
TASAS		-1,6	7,7

	MES 2	MES 3	MES 4
ÍNDICES	***103,686***	***101,745***	***109,356***
TASAS		***-1,9***	***7,5***

4 Propiedades de índices complejos

- **IDENTIDAD**

Supongamos que queremos calcular un índice de Laspeyres para el periodo base. En dicho periodo, los precios y las cantidades que intervienen en la fórmula se refieren al mismo momento. Esto implica que el numerador y el denominador de la fórmula coinciden. Aplicando, por ejemplo, la fórmula del Índice de Laspeyres, tendríamos que:

	PRECIOS	**CANTIDADES**
	PERIODO BASE	**PERIODO BASE**
PRODUCTO 1	324	15
PRODUCTO 2	18	420
PRODUCTO 3	112	57
PRODUCTO 4	1.214	8

	NUMERADOR	DENOMINADOR
	AÑO BASE	**AÑO BASE**
PRODUCTO 1	4860	4860
PRODUCTO 2	7560	7560
PRODUCTO 3	6384	6384
PRODUCTO 4	9712	9712
SUMA	28516	28516

ÍNDICE	***1,000***

El índice es igual a 1 (o 100 si aplicamos la fórmula multiplicada por este número), por lo que se cumple la propiedad de *identidad*.

- **REVERSIBILIDAD**

Supongamos un periodo de cuatro meses. Veamos el resultado de calcular un índice de Laspeyres cuando se considera el mes 1 como base, y hagamos el mismo cálculo considerando el mes 4 como base.

PERIODO BASE: MES 1

	PRECIOS				CANTIDADES			
	BASE				***BASE***			
	MES 1	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**	**MES 1**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	324	315	310	322	15	22	27	10
PRODUCTO 2	18	20	20	24	421	400	502	480
PRODUCTO 3	113	120	123	130	59	60	66	80
PRODUCTO 4	1.227	1.210	1.120	1.100	8	8	8	10

	NUMERADOR	DENOMINADOR
	MES 4	**MES 4**
PRODUCTO 1	4830	4860
PRODUCTO 2	10104	7578
PRODUCTO 3	7670	6667
PRODUCTO 4	8800	9816
SUMA	31404	28921

ÍNDICE MES 4	***1,086***

<u>**PERIODO BASE: MES 4**</u>

	PRECIOS				CANTIDADES			
				BASE				
	MES 1	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**	**MES 1**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	324	315	310	322	15	22	27	10
PRODUCTO 2	18	20	20	24	421	400	502	480
PRODUCTO 3	113	120	123	130	59	60	66	80
PRODUCTO 4	1.227	1.210	1.120	1.100	8	8	8	10

	NUMERADOR	DENOMINADOR
	MES 1	**MES 1**
PRODUCTO 1	3240	3220
PRODUCTO 2	8640	11520
PRODUCTO 3	9040	10400
PRODUCTO 4	12270	11000
SUMA	33190,00	36140,00

ÍNDICE MES 1	***0,918***

Vemos que el índice de Laspeyres no cumple la propiedad de reversibilidad, ya que:

$$ {}_1I^4 \neq \frac{1}{{}_4I^1} \qquad 1{,}086 \neq \frac{1}{0{,}918} $$

Veamos ahora un índice que sí cumple la propiedad de reversibilidad. Consideremos el mismo ejemplo y calculemos un índice de Edgeworth, cuya fórmula recordemos que es:

$$I_E = \frac{\sum p_i^t \times (q_i^0 + q_i^t)}{\sum p_i^0 \times (q_i^0 + q_i^t)}$$

PERIODO BASE: MES 1

	PRECIOS				CANTIDADES			
	BASE				*BASE*			
	MES 1	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**	**MES 1**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	324	315	310	322	15	22	27	10
PRODUCTO 2	18	20	20	24	421	400	502	480
PRODUCTO 3	113	120	123	130	59	60	66	80
PRODUCTO 4	1.227	1.210	1.120	1.100	8	8	8	10

	NUMERADOR	DENOMINADOR
	MES 4	**MES 4**
PRODUCTO 1	4025	4050
PRODUCTO 2	10812	8109
PRODUCTO 3	9035	7853,5
PRODUCTO 4	9900	11043
SUMA	33772	31055,5

ÍNDICE MES 4	***1,087***

PERIODO BASE: MES 4

	PRECIOS				CANTIDADES			
				BASE				
	MES 1	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**	**MES 1**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	324	315	310	322	15	22	27	10
PRODUCTO 2	18	20	20	24	421	400	502	480
PRODUCTO 3	113	120	123	130	59	60	66	80
PRODUCTO 4	1.227	1.210	1.120	1.100	8	8	8	10

	NUMERADOR	DENOMINADOR
	MES 1	**MES 1**
PRODUCTO 1	4050	4025
PRODUCTO 2	8109	10812
PRODUCTO 3	7853,5	9035
PRODUCTO 4	11043	9900
SUMA	31055,50	33772,00

ÍNDICE MES 1	***0,920***

Vemos que el índice de Edgeworth sí cumple la propiedad de reversibilidad, ya que:

$$ {}_{1}I^{4} = \frac{1}{{}_{4}I^{1}} \qquad 1{,}087 = \frac{1}{0{,}920} $$

- **TRANSITIVIDAD**

$$ {}_{0}I^{1} \times {}_{1}I^{2} \times \ldots \times {}_{t-2}I^{t-1} \times {}_{t-1}I^{t} = {}_{0}I^{t} $$

Comprobemos si se cumple la propiedad de transitividad en un índice de Laspeyres. Para ello, consideremos los precios y cantidades de ejemplos anteriores:

	PRECIOS				CANTIDADES			
	MES 1	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**	**MES 1**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	324	315	310	322	15	22	27	10
PRODUCTO 2	18	20	20	24	421	400	502	480
PRODUCTO 3	113	120	123	130	59	60	66	80
PRODUCTO 4	1.227	1.210	1.120	1.100	8	8	8	10

Calculemos el índice de Lapeyres para cada periodo utilizando como periodo base el mes inmediatamente anterior al corriente (es decir, para el mes 2 utilizaremos el mes 1 como base, para el 3 usaremos el 2, y para el 4, el 3). Es decir:

ÍNDICES DE LASPEYRES CON BASE EN EL PERIODO ANTERIOR

	NUMERADOR			DENOMINADOR		
	MES 2	**MES 3**	**MES 4**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	4725	6820	8694	4860	6930	8370
PRODUCTO 2	8420	8000	12048	7578	8000	10040
PRODUCTO 3	7080	7380	8580	6667	7200	8118
PRODUCTO 4	9680	8960	8800	9816	9680	8960
SUMA	29905	31160	38122	28921	31810	35488

ÍNDICES	1,034	***0,980***	***1,074***
PRODUCTO ÍNDICES			**1,088**

ÍNDICES DE LASPEYRES DEL MES 4 CON BASE EN MES 1

	NUMERADOR	DENOMINADOR
	MES 4	**MES 4**
PRODUCTO 1	4830	4860
PRODUCTO 2	10104	7578
PRODUCTO 3	7670	6667
PRODUCTO 4	8800	9816
SUMA	31404	28921

ÍNDICE MES 4	***1,086***

Vemos que el índice del mes 4 calculado como producto de los tres índices con bases en sus respectivos periodos anteriores, es diferente del índice del mes 4 calculado de forma directa con base en el mes 1. Por tanto, no se cumple la propiedad transitiva.

Esta propiedad, sin embargo, se cumple si modificamos ligeramente la fórmula de Laspeyres, y referenciamos al periodo anterior solamente los precios, pero no las cantidades (estas se mantienen estables), es decir, adaptando la fórmula de esta forma:

$$I_L = \frac{\sum p_i^t \times q_i^0}{\sum p_i^{t-1} \times q_i^0}$$

Los resultados serían los siguientes:

ÍNDICES DE LASPEYRES CON BASE DE PRECIOS EN EL PERIODO ANTERIOR

	NUMERADOR			DENOMINADOR		
	MES 2	**MES 3**	**MES 4**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	4725	4650	4830	4860	4725	4650
PRODUCTO 2	8420	8420	10104	7578	8420	8420
PRODUCTO 3	7080	7257	7670	6667	7080	7257
PRODUCTO 4	9680	8960	8800	9816	9680	8960
SUMA	29905	29287	31404	28921	29905	29287

ÍNDICES	1,034	***0,979***	***1,072***
PRODUCTO ÍNDICES			**1,086**

ÍNDICES DE LASPEYRES DEL MES 4 CON BASE EN MES 1

	NUMERADOR	DENOMINADOR
	MES 4	**MES 4**
PRODUCTO 1	4830	4860
PRODUCTO 2	10104	7578
PRODUCTO 3	7670	6667
PRODUCTO 4	8800	9816
SUMA	31404	28921

ÍNDICE MES 4	***1,086***

Vemos que en este caso sí que se cumple la propiedad transitiva.

- **PROPORCIONALIDAD**

Veamos esta propiedad con un índice de Paasche. Los índices calculados anteriormente en el ejemplo de la página 9 son los siguientes:

	PRECIOS				**CANTIDADES**			
	MES 1	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**	**MES 1**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	324	315	310	322	15	22	27	10
PRODUCTO 2	18	20	20	24	420	400	502	480
PRODUCTO 3	112	120	123	130	57	60	66	80
PRODUCTO 4	1.214	1.210	1.120	1.100	8	8	8	10

	NUMERADOR			DENOMINADOR		
	MES 2	**MES 3**	**MES 4**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	6930	8370	3220	7128	8748	3240
PRODUCTO 2	8000	10040	11520	7200	9036	8640
PRODUCTO 3	7200	8118	10400	6720	7392	8960
PRODUCTO 4	9680	8960	11000	9712	9712	12140
SUMA	31810	35488	36140	30760	34888	32980

ÍNDICES	***103,414***	***101,720***	***109,582***
TASAS		***-1,6%***	***7,7%***

Supongamos que en el mes 2, los precios de los cuatro productos son el doble de los del mes base (mes 1), en el mes 3 éstos son 1,5 veces los del mes base, y en el mes 4 son 3 veces mayores que los del mes base.

	PRECIOS				**CANTIDADES**			
	MES 1	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**	**MES 1**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	324	648	486	972	15	22	27	10
PRODUCTO 2	18	36	27	54	420	400	502	480
PRODUCTO 3	112	224	168	336	57	60	66	80
PRODUCTO 4	1.214	2.428	1.821	3.642	8	8	8	10

	NUMERADOR			DENOMINADOR		
	MES 2	**MES 3**	**MES 4**	**MES 2**	**MES 3**	**MES 4**
PRODUCTO 1	14256	13122	9720	7128	8748	3240
PRODUCTO 2	14400	13554	25920	7200	9036	8640
PRODUCTO 3	13440	11088	26880	6720	7392	8960
PRODUCTO 4	19424	14568	36420	9712	9712	12140
SUMA	61520	52332	98940	30760	34888	32980

ÍNDICES	***200,000***	***150,000***	***300,000***

Vemos que el índice recoge perfectamente estas proporciones, ya que el índice en el mes 2 ha aumentado el doble desde el mes base, el del mes 3, 1,5 veces, y el del mes 4 es el triple del año base. Se cumple, por tanto, la propiedad de la *proporcionalidad*.

5 Cálculo práctico de índices de base fija, índices encadenados y reescalado

Supongamos una variable monetaria cuya medición la realizamos trimestralmente. Disponemos de información de la misma para el periodo 2010-2012.

Calcularemos los índices elementales, primero suponiendo una base fija, y después como índices encadenados.

Valores de la variable. Periodo 2010-2012

Año	Trimestre	Valor (€)
2010	1	14
2010	2	15
2010	3	15
2010	4	16
2011	1	12
2011	2	13
2011	3	10
2011	4	8
2012	1	11
2012	2	11
2012	3	9
2012	4	10

- **CÁLCULO DE ÍNDICES ELEMENTALES. BASE FIJA**

- Primero se calcula el valor medio de la variable en el año que consideramos base, en este caso es el año 2010.

$$\overline{V^{2010}} = \sum_{t=1}^{4} \frac{V^T}{4} = \frac{14+15+15+16}{4} = 15$$

- - El índice elemental se calcula como cociente de cada uno de los valores trimestrales entre el valor medio del año 2010, es decir:

$$I^T = \frac{V^T}{\overline{V^{2010}}} \times 100$$

En la siguiente tabla figuran los índices elementales en base 2010, siguiendo la fórmula anterior.

Cálculo de los índices elementales. Base 2010

Año	Trimestre	Índice elemental
2010	1	(14/15)*100=93,333
2010	2	(15/15)*100=100,000
2010	3	(15/15)*100=100,000
2010	4	(16/15)*100=106,667
2011	1	(12/15)*100=80,000
2011	2	(13/15)*100=80,667
2011	3	(10/15)*100=66,667
2011	4	(8/15)*100=53,333
2012	1	(11/15)*100=73,333
2012	2	(11/15)*100=73,333
2012	3	(9/15)*100=60,000
2012	4	(10/15)*100=66,667

Nota: Nótese que la media de los índices elementales del año base (2010) es igual a 100, por definición.

- **CÁLCULO DE ÍNDICES ENCADENADOS**

Calculemos ahora los índices encadenados, suponiendo que el periodo de referencia es el último trimestre del año anterior a cada año corriente.

- Primero se calculan los índices elementales de cada trimestre, teniendo en cuenta que ahora la referencia no es la media del año 2010, sino los últimos trimestres de cada año anterior al de referencia, es decir, los índices elementales del año 2011 estarán referidos al 4º trimestre de 2010 y los de 2012 al 4º trimestre de 2011. La fórmula utilizada es la siguiente:

$$I^T = \frac{V^T}{V^{4^oT,t-1}} \times 100$$

- Posteriormente, se calculan los índices encadenados. Los índices elementales, como están referidos a trimestres distintos según en qué año nos situemos (los del año 2011 se refieren al 4º trimestre de 2010, y los del año 2012, se refieren al 4º trimestre de 2011) no tienen continuidad en el tiempo. Es preciso realizar un encadenamiento para dotar de homogeneidad a la serie. Para ello, cada índice se va a multiplicar por un coeficiente, calculado de la siguiente forma:

$$C^t = \frac{I^{4T,t-1}}{100} \qquad IE^T = I^T \times C^t$$

Año	Trimestre	Índices elementales no publicables (sin encadenar) $I^T = \frac{V^T}{V^{4^oT,t-1}} \times 100$	Índices elementales publicables (encadenados) $IE^T = I^T \times C^t$
2011	1	(12/16)*100=75,000	75,000*(106,667/100)=80,00
2011	2	(13/16)*100=81,250	81,250*(106,667/100)=86,67
2011	3	(10/16)*100=62,500	62,500*(106,667/100)=66,67
2011	4	(8/16)*100=50,000	50,000*(106,667/100)=53,33
2012	1	(11/8)*100=137,500	137,500*(53,33/100)=73,33
2012	2	(11/8)*100=137,500	137,500*(53,33/100)=73,33
2012	3	(9/8)*100=112,500	112,500*(53,33/100)=60,00
2012	4	(10/8)*100=125,000	125,000*(53,33/100)=66,66

- **CÁLCULO DE ÍNDICES AGREGADOS DE BASE FIJA**

Supongamos ahora una economía con dos sectores de actividad, en un país con cuatro regiones. La siguiente tabla muestra los valores de la variable en ambos sectores, para cada una de las cuatro regiones:

	Sector 1	**Sector 2**
Región A	3	10
Región B	1	15
Región C	2	7
Región D	5	1

Por otra parte, supongamos los índices en un momento t de cada uno de los sectores y regiones:

	Sector 1	**Sector 2**
Región A	130	100
Región B	100	105
Región C	120	79
Región D	115	110

- **Cálculo de ponderaciones**

Para el cálculo de las ponderaciones, primero obtenemos los subtotales por Región y por sector:

	Sector 1	**Sector 2**	**Total**
Región A	3	10	3+10=13
Región B	1	15	1+15=16
Región C	2	7	2+7=9
Región D	5	1	5+1=6
Total	3+1+2+5=11	10+15+7+1=33	11+33=13+16+9+6=44

A continuación calculamos las ponderaciones como proporción de cada celda respecto al total o subtotal objetivo:

- Por sectores:

	Sector 1	**Sector 2**
Región A	3/11=0,272727	10/33=0,303030
Región B	1/11=0,090909	15/33=0,454545
Región C	2/11=0,181818	7/33=0,212121
Región D	5/11=0,454545	1/33=0,030303
Total	0,272727+0,090909+0,181818+0,454545 =1,000	0,303030+0,454545+0,212121+0,030303= 1,000

- Por regiones:

	Sector 1	**Sector 2**	**Total**
Región A	3/13=0,230769	10/13=0,769231	0,230769+0,769231=1,000
Región B	1/16=0,062500	15/16=0,937500	0,062500+0,937500=1,000
Región C	2/9=0,222222	7/9=0,777778	0,222222+0,777778=1,000
Región D	5/6=0,833333	1/6=0,166667	0,833333+0,166667=1,000

- **Cálculo de los índices agregados**

Índices de los sectores

El índice de cada sector se obtiene como suma ponderada de los índices del sector en cada una de las regiones:

$$I_S^t = \sum_{R=1}^{4} I_{SR}^t \times W_{SR}$$

Sector 1=0,272727*130+0,090909*100+0,181818*120+0,454545*115=118,636245

Sector 2=0,303030*100+0,454545*105+0,212121*79+0,030303*110=98,121114

Índices de las regiones

El índice agregado de cada región, se obtiene como suma ponderada de los índices de cada sector en cada región:

$$I_R^t = \sum_{S=1}^{2} I_{SR}^t \times W_{RS}$$

Región A=0,230769*130+0,769231*100=106,92307

Región B=0,062500*100+0,937500*105=104,6875

Región C=0,222222*120+0,777778*79=88,111102

Región D=0,833333*115+0,166667*110=114,166665

Índice general

El índice general se obtiene, o bien como suma ponderada de los dos índices agregados de los sectores, o bien como suma ponderada de los índices agregados de las cuatro regiones:

General por sectores=0,250*118,636245+0,750*98,121114=**103,249897**

General por regiones=0,295455*106,92307+0,363636*104,6875+0,204545*88,111102+0,136363*114,166665=**103,249894**

- **REESCALA DE ÍNDICES**

Supongamos una serie de índices referenciados al año 2011,es decir, la media de los índices en el año 2011 es igual a 100.

Año	Trimestre	Índice base 2011
2011	1	113,879
2011	2	115,303
2011	3	95,373
2011	4	75,445
2012	1	137,339
2012	2	139,056
2012	3	115,021
2012	4	90,987
2013	1	125,322
2013	2	125,322
2013	3	103,004
2013	4	115,021

Vamos a cambiar de año de referencia, pasando de 2011 a 2013. Es decir, recalculemos la serie de índices de forma que ahora la media de los índices del año 2013 sea igual a 100.

Para ello, basta con multiplicar todos los índices de la serie por un coeficiente de reescala, calculado de la siguiente forma:

$$C^t = \frac{100}{\overline{{}_{2011}I^{2013}}}$$

Es decir, el coeficiente se calcula como cociente de 100 entre el índice medio de los índices del año 2013 medidos con el año 2011 como referencia (antes de ser reescalado a 2013=100).

$$\overline{{}_{2011}I^{2013}} = \frac{125{,}322 + 125{,}322 + 103{,}004 + 115{,}021}{4} = 117{,}167$$

Año	Trimestre	Índice base 2013
2011	**1**	(113,879/117,167)*100=97,194
2011	**2**	(115,303/117,167)*100=98,409
2011	**3**	(95,373/117,167)*100=81,399
2011	**4**	(75,445/117,167)*100=64,391
2012	**1**	(137,339/117,167)*100=117,216
2012	**2**	(139,056/117,167)*100=118,682
2012	**3**	(115,021/117,167)*100=98,168
2012	**4**	(90,987/117,167)*100=77,656
2013	**1**	(125,322/117,167)*100=106,960
2013	**2**	(125,322/117,167)*100=106,960
2013	**3**	(103,004/117,167)*100=87,912
2013	**4**	(115,021/117,167)*100=98,168

A partir de la serie reescalada, comprobamos como la media de los índices del año 2013 es ahora igual a 100:

$$\overline{{}_{2013}I^{2013}} = \frac{106{,}960 + 106{,}960 + 87{,}912 + 98{,}168}{4} = 100{,}000$$

6 Cálculo de agregaciones a partir de índices encadenados

Supongamos una serie de índices de precios encadenados (los publicados oficialmente) de tres parcelas de consumo, y queremos calcular el índice agregado de las tres, para conocer la evolución conjunta del sector.

Se tiene, por tanto, como información de partida, los índices publicados base 2011, mes a mes, de cada parcela, para diciembre de 2010 y los años 2011 y 2012, y las ponderaciones en vigor esos años.

	Índices encadenados (publicados) base 2011		
Mes-año	**Parcela 1**	**Parcela 2**	**Parcela 3**
dic-10	99,774	103,581	102,084
ene-11	99,581	103,401	104,263
feb-11	99,856	103,163	106,943
mar-11	100,215	101,870	108,943
abr-11	100,582	100,499	110,545
may-11	100,694	100,014	112,371
jun-11	100,357	99,628	103,646
jul-11	100,296	99,438	96,462
ago-11	99,749	99,153	93,370
sep-11	99,592	99,061	92,289
oct-11	99,672	98,506	90,975
nov-11	99,738	97,995	90,066
dic-11	99,667	97,271	90,128
ene-12	101,340	98,253	90,923
feb-12	99,990	107,291	91,640
mar-12	98,695	108,596	91,890
abr-12	101,476	104,915	93,015
may-12	101,293	100,234	95,237
jun-12	110,849	96,782	94,654
jul-12	109,004	94,437	96,230
ago-12	111,054	93,141	98,523
sep-12	106,193	98,050	98,850
oct-12	105,819	98,615	99,337
nov-12	105,963	100,200	102,044
dic-12	103,149	106,719	105,328
Pond 2011	6,58	3,28	2,47
Pond 2012	6,46	3,35	2,62

1) Cálculo de los índices de las parcelas, referidos a diciembre de t-1

Lo primero que se debe hacer es transformar los índices publicados (que ya están encadenados) a índices referidos a diciembre del año anterior (o índices no publicables, denotados como INP). Este proceso, que podemos denominar **desencadenamiento**, se basa en establecer que el índice de diciembre de cada año es igual a 100 (ya que será el mes de referencia) y aplicar sobre él la variación acumulada de cada uno de los meses, para obtener así los respectivos índices referenciados a diciembre de *t-1*. Esta transformación debe realizarse de manera independiente en cada una de las parcelas.

$$ {}_{dic(t-1)}INP_i^{m,t} = 100 \text{ x } \frac{{}_{11}I_i^{m,t}}{{}_{11}I_i^{dic\,t-1}} $$

Por ejemplo, los índices referidos a diciembre de 2010 de la parcela 1 para los meses de enero y febrero de 2011 se calcula como:

$$ {}_{dic-10}INP_{parcela\ 1}^{ene-11} = 100 \text{ x } \frac{{}_{11}I_{parcela\ 1}^{ene-11}}{{}_{11}I_{parcela\ 1}^{dic-10}} = 100 \text{ x } \frac{99{,}581}{99{,}774} = 99{,}807 $$

$$ {}_{dic-10}INP_{parcela\ 1}^{feb-11} = 100 \text{ x } \frac{{}_{11}I_{parcela\ 1}^{feb-11}}{{}_{11}I_{parcela\ 1}^{dic-10}} = 100 \text{ x } \frac{99{,}856}{99{,}774} = 100{,}082 $$

Y los índices referidos a diciembre de 2011 de la parcela 1 para los meses de enero y febrero de 2012 se calcula como:

$$_{dic-11}INP^{ene-12}_{parcela\ 1} = 100 \quad x \quad \frac{_{11}I^{ene-12}_{parcela\ 1}}{_{11}I^{dic-11}_{parcela\ 1}} = 100 \quad x \quad \frac{101,340}{99,667} = 101,679$$

$$_{dic-11}INP^{feb-12}_{parcela\ 1} = 100 \quad x \quad \frac{_{11}I^{feb-12}_{parcela\ 1}}{_{11}I^{dic-11}_{parcela\ 1}} = 100 \quad x \quad \frac{99,990}{99,667} = 100,324$$

	Índices referidos a diciembre		
Mes-año	**Parcela 1**	**Parcela 2**	**Parcela 3**
dic-10	100,000	100,000	100,000
ene-11	99,807	99,826	102,135
feb-11	100,082	99,596	104,760
mar-11	100,442	98,348	106,719
abr-11	100,810	97,025	108,288
may-11	100,922	96,556	110,077
jun-11	100,584	96,184	101,530
jul-11	100,523	96,000	94,493
ago-11	99,975	95,725	91,464
sep-11	99,818	95,636	90,405
oct-11	99,898	95,100	89,118
nov-11	99,964	94,607	88,227
dic-11	99,893	93,908	88,288
dic-11	100,000	100,000	100,000
ene-12	101,679	101,010	100,882
feb-12	100,324	110,301	101,678
mar-12	99,025	111,643	101,955
abr-12	101,815	107,858	103,203
may-12	101,631	103,046	105,669
jun-12	111,219	99,497	105,022
jul-12	109,368	97,086	106,770
ago-12	111,425	95,754	109,315
sep-12	106,548	100,801	109,677
oct-12	106,173	101,382	110,218
nov-12	106,317	103,011	113,221
dic-12	103,494	109,713	116,865

NOTA: Para comprobar que los cálculos se han hecho bien, se pueden calcular las tasas mensuales obtenidas con los índices encadenados y con los índices referidos a diciembre. Estas tasas deben coincidir.

2) Cálculo de los índices del agregado, referidos a diciembre de t-1

Una vez calculados los índices referidos a diciembre de cada una de las parcelas, ya se pueden calcular los índices del agregado (lógicamente, estarán también referidos a diciembre). Esto se calcula mediante la suma ponderada de los índices referidos a diciembre de los componentes:

$$_{dic(t-1)}INP^{\,m,t}_{\,agregado} = \sum_{i=1}^{3} {}_{dic(t-1)}INP^{\,m,t}_{\,parcela\ i} \ \text{x} \ {}_{t}W_{i} \ ,$$

con ${}_{t}W_{i}$ en tanto por uno

Por ejemplo, el índice referido a diciembre de 2010 del agregado para enero de 2011 se calcula como:

$$_{dic-10}INP^{\,ene-11}_{\,agregado} = {}_{dic-10}INP^{\,ene-11}_{\,parcela\ 1} \ \mathbf{x} \ {}_{2011}W_{parcela\,1} +$$

$$= {}_{dic-10}INP^{\,ene-11}_{\,parcela\ 2} \ \mathbf{x} \ {}_{2011}W_{parcela\,2} + {}_{dic-10}INP^{\,ene-11}_{\,parcela\ 3} \ \mathbf{x} \ {}_{2011}W_{parcela\,3} =$$

$$= \frac{99{,}807 \ \mathbf{x} \ 6{,}58 + 99{,}826 \ \mathbf{x} \ 3{,}28 + 102{,}135 \ \mathbf{x} \ 2{,}47}{(6{,}58 + 3{,}28 + 2{,}47)} = 100{,}278$$

Mes-año	Índices referidos a diciembre del agregado
dic-10	100,000
ene-11	100,278
feb-11	100,890
mar-11	101,142
abr-11	101,301
may-11	101,595
jun-11	99,603
jul-11	98,112
ago-11	97,139
sep-11	96,820
oct-11	96,462
nov-11	96,188
dic-11	95,976
dic-11	100,000
ene-12	101,330
feb-12	103,298
mar-12	103,043
abr-12	103,736
may-12	102,864
jun-12	106,754
jul-12	105,511
ago-12	106,757
sep-12	105,659
oct-12	105,734
nov-12	106,881
dic-12	107,988

3) Cálculo de los índices encadenados del agregado

Por último, se encadenan los índices del agregado, para poder calcular tasas de variación de un año o más. Como la serie de datos que se tiene comienza en diciembre de 2010, el primer año que habría que encadenar es el 2012. Durante el año 2011, los índices referidos a diciembre coinciden con los índices encadenados.

$$_{dic-10}I^{m,t}_{agregado} = {}_{dic-11}INP^{m,t}_{agregado} \text{ x } \frac{_{dic-10}I^{dic-11}_{agregado}}{100}$$

Así, por ejemplo, el índice encadenado del agregado de enero de 2012 se calcula del siguiente modo.

$$_{dic-10}I^{ene-12}_{agregado} = {}_{dic-11}INP^{ene-12}_{agregado} \text{ x } \frac{_{dic-10}I^{dic-11}_{agregado}}{100}$$

Mes-año	Índices encadenados del agregado (base diciembre 2010)
dic-10	100,000
ene-11	100,278
feb-11	100,890
mar-11	101,142
abr-11	101,301
may-11	101,595
jun-11	99,603
jul-11	98,112
ago-11	97,139
sep-11	96,820
oct-11	96,462
nov-11	96,188
dic-11	95,976
ene-12	97,253
feb-12	99,142
mar-12	98,897
abr-12	99,562
may-12	98,724
jun-12	102,458
jul-12	101,265
ago-12	102,461
sep-12	101,407
oct-12	101,479
nov-12	102,580
dic-12	103,643

Si se quiere tener una serie en base 2011, como la de los datos de las parcelas, habría que re-escalar los índices para referenciarlos al año 2011

$$ {}_{11}I^{ene-12}_{agregado} = {}_{dic-11}I^{m,t}_{agregado} \text{ x } \frac{100}{\sum_{m=1}^{12} {}_{dic-11}I^{m,2011}_{agregado}} $$

Por ejemplo, el índice del agregado en base 2011 de marzo de 2012 es:

$$ {}_{11}I^{mar-12}_{agregado} = {}_{dic-11}I^{mar-12}_{agregado} \text{ x } \frac{100}{\sum_{m=1}^{12} {}_{dic-11}I^{m,2011}_{agregado}} = 99,562 \text{ x } \frac{100}{98,792} = 100,106 $$

Mes-año	Índices encadenados del agregado (base 2011)
dic-10	101,223
ene-11	101,504
feb-11	102,123
mar-11	102,379
abr-11	102,539
may-11	102,837
jun-11	100,821
jul-11	99,311
ago-11	98,327
sep-11	98,003
oct-11	97,641
nov-11	97,364
dic-11	97,149
ene-12	98,442
feb-12	100,354
mar-12	100,106
abr-12	100,779
may-12	99,931
jun-12	103,711
jul-12	102,503
ago-12	103,714
sep-12	102,647
oct-12	102,720
nov-12	103,835
dic-12	104,910

Si hubiéramos calculado los índices del agregado a partir de los índices publicados (tabla de la página 25), se habrían obtenido los siguientes índices:

Mes-año	**Índices del agregado calculados a partir de los índices encadenados (base 2011)**
dic-10	101,249
ene-11	101,535
feb-11	102,155
mar-11	102,404
abr-11	102,556
may-11	102,852
jun-11	100,822
jul-11	99,300
ago-11	98,313
sep-11	97,988
oct-11	97,620
nov-11	97,337
dic-11	97,119
ene-12	98,312
feb-12	100,198
mar-12	99,929
abr-12	100,619
may-12	99,731
jun-12	103,644
jul-12	102,386
ago-12	103,585
sep-12	102,451
oct-12	102,511
nov-12	103,584
dic-12	104,570

NOTA: Como los índices publicados de las parcelas están en base 2011, la agregación de éstos están en base 2011

Se puede ver en la siguiente tabla que las tasas de variación anual de los índices así calculados no son iguales a las obtenidas con los índices bien calculados:

	Tasas de variación anuales	
Mes-año	**Índices encadenados (tabla pg 30)**	**Índices calculados a partir de los encadenados (tabla pg 31)**
dic-11	-2,7%	-2,9%
ene-12	-1,1%	-1,3%
feb-12	-2,0%	-2,2%
mar-12	-1,6%	-1,7%
abr-12	-2,5%	-2,8%
may-12	0,8%	0,8%
jun-12	1,7%	1,6%
jul-12	4,4%	4,3%
ago-12	4,4%	4,2%
sep-12	4,8%	4,6%
oct-12	6,3%	6,1%
nov-12	7,8%	7,4%
dic-12	-2,7%	-2,9%