INSTITUTO NACIONAL DE ESTADISTICA

# Bloque 1.1
# Teoría de números índices

Septiembre, 2014

# Índice

## Bloque 1.1. Teoría de números índices

# Tema 1. Introducción. Teoría de los números índices y sus aplicaciones

## 1.1 Una visión teórica general

El principal problema que intentan resolver los números índices es conseguir una expresión cuantitativa representativa de un conjunto de agregados elementales heterogéneos que no pueden medirse en unidades físicas comunes.

Un número índice se define como una medida estadística que compara una magnitud o variable en dos situaciones distintas, una de las cuales se considera *base o referencia*.

Los índices se pueden clasificar de diversas formas según sus características.

### Primera clasificación de los números índices. Según la referencia

Una primera clasificación de los números índices viene determinada por las situaciones que pretende medir. Si éstas se refieren al tiempo, se trata de **índices temporales**. Por su parte, cuando las situaciones que se comparan son áreas geográficas o territorios, se construyen índices **espaciales o territoriales**.

El ejemplo más característico de índices espaciales son las Paridades de Poder Adquisitivo (PPA), que comparan, entre otras variables, los niveles de precios de las capitales de los países de la Unión Europea (UE). Se trata de una estadística cuyo cálculo es responsabilidad de la Oficina de Estadística de la UE (Eurostat), que considera la UE o de la Unión Monetaria (UM) como territorios de referencia; así, países con índices con valores superiores a 100 indican que sus niveles de precios están por encima de la media, y aquellos con índices por debajo de 100 tienen precios inferiores a la media del territorio de referencia.

### Segunda clasificación de los números índices. Según la variable estudiada

La otra posible clasificación de los números índices viene dada por la variable o variables objeto de estudio. Según cual sea ésta, se consideran **índices de precios**, **índices de cantidad o índices de valor**.

Los índices de precios más destacados de los calculados por el INE son el Índice de Precios de Consumo (IPC) o el Índice de Precios Industriales (IPRI); por su parte, el Índice de Producción Industrial (IPI), es el más relevante índice de cantidad o producción física; de los índices de valor, destacan el Índice de Comercio al por Menor (ICM), que establece comparaciones temporales del valor de las ventas, el Índice de Cifra de Negocios (ICN), o el Índice de Actividad del Sector Servicios (IASS), que miden la evolución de las cifras de negocios de la industria y los servicios, respectivamente. También destacan el Índice de Salarios y el Índice de Ocupación, que utilizan variables de niveles salariales y número de empleados, respectivamente.

**Tercera clasificación de los números índices. Según la complejidad de su construcción**

Según su composición y forma de construcción, se puede hablar de números índices simples y números índices complejos.

Los **índices simples o índices elementales** representan la expresión más básica en el cálculo de los números índices. De hecho, su principal característica radica en la imposibilidad de desagregar más los componentes utilizados en su cálculo[1].

Los **índices complejos**, o índices agregados, se calculan como agregaciones de índices simples. En su cálculo pueden intervenir diferentes factores de ponderación dependiendo de la naturaleza del índice.

## 1.2 Índices simples y sus propiedades

La expresión matemática de un índice simple es la siguiente:

$$I_i^t = \frac{X_i^t}{X_i^0}$$

[1] En algunos manuales estadísticos sobre números índices, los índices simples son considerados como relaciones de variables, sin llegar a ser considerados índices como tal.

siendo:

$I_i^t$ el índice en el periodo *t* del elemento *i*.

$X_i^t$ el valor de la variable *X* en el periodo *t* para el elemento *i*.

$X_i^0$ el valor de la variable *X* en el periodo *0* (periodo base) para el elemento *i*.

Para facilitar la interpretación de los datos, así como hacer más cómodas las operaciones que se realicen con los números índices, este cociente se multiplica por 100. Por ello, la fórmula que se utiliza más habitualmente es la siguiente:

$$I_i^t = \frac{X_i^t}{X_i^0} \times 100$$

Según la variable que estudien, se puede hablar de tres tipos fundamentales de índices:

- Índices de precios
- Índices de cantidad
- Índices de valor

### 1.2.1 PROPIEDADES DE LOS ÍNDICES SIMPLES

Los índices simples contienen, por definición, las siguientes propiedades:

***Homogeneidad o comensurabilidad***

El índice es invariante respecto de las unidades de medida que se empleen en las variables con las que se calculan. Por definición, los números índices son precisamente valores adimensionales, lo que implica que no vienen afectados por las unidades de medida de sus componentes.

***Identidad***

Cuando las situaciones base y objeto coinciden, el índice debe reducirse a la unidad (o 100, si está multiplicado por 100). Precisamente, esta propiedad es la utilizada para indicar cuál es el periodo o el territorio geográfico de referencia.

$$ {}_{0}I^{0} = 100 $$

***Reversibilidad*.**

Si un índice tiene las situaciones base y objeto iguales respectivamente a las objeto y base de otro, sus valores deben ser inversos.

$$ {}_{0}I^{t} = \frac{100}{{}_{t}I^{0}} $$

***Transitividad o circularidad*.**

El producto de índices que tienen sucesivamente como base la situación objeto del anterior, debe ser igual al índice con base la del primero y objeto la del último.

$$ {}_{0}I^{1} \times {}_{1}I^{2} \times \ldots \times {}_{t-2}I^{t-1} \times {}_{t-1}I^{t} = {}_{0}I^{t} $$

***Proporcionalidad*.**

Si todas las variables de la situación objeto son proporcionales a las de la base, el índice debe tomar como valor el factor de proporcionalidad.

## 1.3 Índices complejos y sus propiedades

Hemos visto que los índices simples comparan una variable en dos situaciones distintas. El resultado es un valor independiente de la unidad de medida de la variable. Sin embargo, el potencial real de los números índices se pone de manifiesto cuando se trata de medir varias variables o elementos en esas dos situaciones, ya que es en ese momento cuando es preciso corregir el problema que supone la agregación de variables con diferentes unidades de medida, o **heteromensurabilidad**.

La construcción de los índices complejos a partir de los índices simples ofrece diversas posibilidades según sean las decisiones adoptadas en lo que se refiere a los siguientes aspectos metodológicos:

- Forma de agregación
- Fuentes utilizadas para ponderar los componentes
- Fórmula de cálculo

Un índice complejo tiene la siguiente expresión matemática:

$$I_t = f\left(I_{it}, W_i\right)$$

Se trata, pues, de una función de índices simples en el momento *t* y sus respectivas ponderaciones.

Lógicamente, la forma de ponderar condicionará el tipo de índice resultante; así, por ejemplo, si se asocia una ponderación igual a cada elemento el resultado es un índice equivalente a calcularlo sin ponderar sus elementos. Cuando, por el contrario, se asignan ponderaciones diferentes a cada elemento los índices agregados se denominan índices complejos ponderados.

Entre los índices complejos no ponderados se pueden considerar varios tipos según sea la fórmula general utilizada para agregar:

- **Medias aritméticas de índices simples**

$$I_A = \frac{I_1 + I_2 + \ldots + I_i + \ldots + I_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} I_i}{N}$$

Donde:

$I_A$ es el índice agregado.

$I_i$ es el índice simple del elemento *i*

$N$ es el número de elementos que se agregan.

- **Medias geométricas de índices simples**

$$I_G = \sqrt[N]{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_i \times \ldots \times I_N} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} I_i}$$

- **Medias armónicas de índices simples.**

$$I_H = \frac{N}{\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + \ldots + \frac{1}{I_i} + \ldots + \frac{1}{I_N}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{I_i}}$$

- **Medias agregativas**

$$I_A^t = \frac{x_1^t + x_2^t + \ldots + x_i^t + \ldots + x_N^t}{x_1^0 + x_2^0 + \ldots + x_i^0 + \ldots + x_N^0} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^t}{\sum_{i=1}^{N} x_i^0}$$

De la misma forma, cuando las ponderaciones que se asignan a cada elemento son diferentes, las fórmulas toman las siguientes formas:

- **Medias aritméticas ponderadas**

$$I^* = \frac{I_1 w_1 + I_2 w_2 + \ldots + I_i w_i + \ldots + I_N w_N}{w_1 + w_2 + \ldots + w_i + \ldots + w_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} I_i w_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

Donde:

$I^*$ es el índice agregado

$I_i$ es el índice simple del elemento *i* .

$W_i$ es la ponderación del elemento *i*

Cuando las ponderaciones están expresadas en tanto por uno la suma de todas ellas debe ser igual a la unidad, y la fórmula agregada es:

$$I^* = \sum_i I_i W_i$$

- **Medias geométricas ponderadas**

$$I_G^* = \sqrt[\sum_i w_i]{I_1^{w_1} \ldots I_i^{w_i} \ldots I_N^{w_N}} = \sqrt[\sum_{i=1}^{N} w_i]{\mathop{\Pi}_{i=1}^{N} I_i^{w_i}}$$

- **Medias armónicas ponderadas**

$$I_H^* = \frac{w_1 + \ldots + w_i + \ldots + w_N}{\frac{1}{I_1} w_1 + \ldots + \frac{1}{I_i} w_i + \ldots + \frac{1}{I_N}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i}{\sum_{i=1}^{N} \frac{w_i}{I_i}}$$

- **Medias agregativas ponderadas**

$$I_A^* = \frac{x_1^t w_1 + \ldots + x_i^t w_i + \ldots + x_N^t w_N}{x_1^0 w_1 + \ldots + x_i^0 w_i + \ldots + x_N^0 w_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^t w_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^0 w_i}$$

### 1.3.1 PROPIEDADES DE LOS ÍNDICES COMPLEJOS

En 1927, Irving Fisher estableció una serie de criterios que es aconsejable satisfagan las diferentes fórmulas que se propongan como medidas estadísticas. En la medida que cumplan unos u otros, las fórmulas propuestas tienen más o menos calidad. Estos criterios, planteados también como propiedades para los índices simples, son los siguientes:

- ***Identidad***

Cuando las situaciones base y objeto coinciden, el índice debe reducirse a la unidad.

- ***Reversibilidad***

Si un índice tiene las situaciones base y objeto iguales respectivamente a las objeto y base de otro, sus valores deben ser inversos.

- ***Homogeneidad o comensurabilidad***

El índice es invariante respecto de las unidades de medida que se empleen en las variables objeto de estudio.

- ***Transitividad o circular***

El producto de índices que tienen sucesivamente como base la situación objeto del anterior, debe ser igual al índice con base la del primero y objeto la del último.

- ***Determinabilidad***

El hecho de anularse algún componente no ha de hacer nulo, ni infinito, ni indeterminado el índice.

- ***Proporcionalidad***

Si todos las variables de la situación objeto son proporcionales a los de la base, el índice debe tomar como valor el factor de proporcionalidad.

Este planteamiento de Fisher queda aún vigente como un conjunto de tests que permite juzgar la bondad teórica de las distintas fórmulas utilizadas.

Fisher llegó a recopilar 134 fórmulas estadísticas, lo cual nos da una idea de la cantidad de intentos realizados para medir los cambios en el nivel de variables de la forma más exacta posible. De todas ellas, sólo las fórmulas agregativas merecerán comentarios en este contexto en el que nos movemos, y de ellas las de Laspeyres y Paasche son las que han merecido más atención y aprobación por parte de los expertos.

Además de los criterios mencionados, existe una serie de normas básicas que deben cumplirse cuando se construye un índice complejo. Estas normas aseguran la calidad del indicador desde el punto de vista de la coherencia interna y la interpretación de los resultados.

Entre las propiedades que suele desearse tengan las fórmulas estadísticas están las siguientes:

- ***Agregatividad***

Posibilidad de calcular índices de todos los elementos a partir de índices parciales que correspondan a conjuntos o grupos de elementos.

- ***Variación proporcional***

Si todos las variables sufren una variación aditiva proporcional a ellos, el índice sufre la misma variación.

- ***Inalterabilidad***

Si se introduce un nuevo elemento cuyo índice simple sea igual al índice complejo sin él, éste no varía.

- ***Coherencia***

Adecuación de los coeficientes de ponderación a los hechos que motivan la ponderación.

- ***Representatividad***

Para el cálculo de índices no se toman todos los elementos, sino que se elige un conjunto de ellos, lo que producirá un error que deberá añadirse a los de observación y cálculo, dando lugar al error total. Cuanto menor sea, se dirá que el índice es más representativo.

## 1.4 Índices de Precios

Cuando nos circunscribimos a los índices de precios, el problema se aborda desde dos ópticas: elaborando **índices con base económica**, elaborando **índices con base estadística**.

El primer punto de vista se basa en la existencia de relaciones entre precios y cantidades que concluyen en una definición de tipo funcional. En el segundo tipo de índices estas series de precios y cantidades pueden tratarse como colectivos distintos e independientes.

- **Índices con base económica**

Dentro de los índices con base económica se engloba, en su origen, el llamado *Índice del coste de la vida*. Existen diferentes definiciones que explican la concepción de un indicador de este tipo. En líneas generales, se trata de medir la variación del gasto en que tiene que incurrir el consumidor para mantener la misma satisfacción -el mismo nivel de vida- en dos momentos del tiempo, si solo difieren los precios entre ambos momentos.

El gran problema con el que nos encontramos en una definición de este tipo es la dificultad para encontrar un concepto claro de lo que es un índice del coste de la vida, ya que implícitamente es necesario definir un nivel de vida y una función de utilidad que determine la satisfacción.

Por ello, esta idea se ha ido, si no olvidando ya que siempre está abierta al debate, sí obviando a la hora de elaborar sistemas de índices de precios de consumo.

- **Índices con base estadística.**

Así como los índices funcionales de precios, o con base económica, tienen como condicionante común el que en las dos situaciones consideradas se mantuviera el nivel de satisfacción, los índices de precios con base estadística abandonan este ideal inalcanzable y se contentan con la comparación del nivel de precios en ambas situaciones.

Existen diversas fórmulas para calcular los índices de precios. Si se parte de las situaciones *0* y *t*, los precios $P_i$ en ambas situaciones y las cantidades $Q_i$ que determinan la estructura de consumo dada, el índice agregativo será:

$$I_a^t = \sum_i I_i^t \times W_i , \text{ con } W_i = \frac{Q_i \times P_i^0}{\sum_i Q_i \times P_i^0} \text{, es decir: } I_a^t = \frac{\sum_i I_i^t \times Q_i \times P_i^0}{\sum_i Q_i \times P_i^0},$$

que también puede expresarse como:

$$I_a = \frac{\sum P_i^t \times Q_i}{\sum P_i^0 \times Q_i}$$

lo que nos permite definir el índice agregativo como la relación de los costes de una determinada estructura de consumo a precios de la situación en el momento *t* respecto de la situación base.

La diferente definición del conjunto $\{Q_i\}$ (conjunto de ponderaciones) da lugar a las numerosas fórmulas existentes en la literatura de índices.

1. Si definimos en general $q_i=(1-\mu)q_{io}+\mu q_{it}$, obtenemos la fórmula estadística de BÖWLEY:

$$I_B = \frac{\sum p_i^t \times \left((1-\mu)\times q_i^0 + \mu \times q_i^t\right)}{\sum p_i^0 \times \left((1-\mu)\times q_i^0 + \mu \times q_i^t\right)}$$

Dependiendo de los diferentes valores que tome $\mu$ se obtienen, a su vez, distintas fórmulas:

2. Si $\mu$=0, obtenemos la fórmula de LASPEYRES

$$I_L = \frac{\sum p_i^t \times q_i^0}{\sum p_i^0 \times q_i^0}$$

Según esta fórmula los precios se ponderan por las cantidades consumidas en la situación base.

3. Si $\mu$=1, obtenemos la fórmula de PAASCHE

$$I_P = \frac{\sum p_i^t \times q_i^t}{\sum p_i^0 \times q_i^t}$$

que es el índice recíproco del anterior, donde se utilizan como ponderaciones las cantidades consumidas en la situación objeto.

4. Si $\mu$ =1/2, se obtiene la fórmula de EDGEWORTH

$$I_E = \frac{\sum p_i^t \times (q_i^0 + q_i^t)}{\sum p_i^0 \times (q_i^0 + q_i^t)}$$

En este caso, se trata de calcular la media aritmética simple de las cantidades en ambas situaciones.

5. Si las cantidades son todas iguales, se obtiene la fórmula de BRADSTREST-DUDOT

$$I_{BD} = \frac{\sum p_i^t}{\sum p_i^0}$$

Esta fórmula traslada la importancia de cada artículo únicamente al precio y con ello también a la unidad en que se mide dicho artículo.

6. Si en el caso anterior hacemos todas las cantidades iguales a la inversa de su precio, es decir, $Q_i=1/P_{io}$, para todo artículo i, obtenemos la fórmula de SAUERBECK

$$I_S = \frac{1}{n} \sum I_i$$

la cual es una media aritmética simple de los índices elementales de cada artículo.

7. Si se elige como situación de referencia de la estructura de consumo una situación no coincidente con la base ni la objeto, se tiene la fórmula de LOWE.

$$I_{LW} = \frac{\sum p_i^t \times q_i^\tau}{\sum p_i^0 \times q_i^\tau}$$

8. Por último mencionar el llamado ***índice ideal de Fisher*** (con anterioridad fue considerada por otros autores, Böwley, Walsh y Pigou, pero fue Fisher quien bautizó este índice con el nombre de ideal)

$$I_F = \sqrt{I_P \times I_L}$$

Existen otros muchos índices, aunque no es la intención de este tema profundizar más en esta materia, sino dar únicamente una visión panorámica de ella.

## 1.5 Aspectos prácticos de la construcción y utilización de los números índices

En este apartado se destacan los aspectos más relevantes que se plantea un productor de estadísticas cuando diseña un sistema de indicadores basado en el cálculo de números índices.

### 1.5.1 ÍNDICES DE BASE FIJA VS. ÍNDICES ENCADENADOS

Como se ha comentado anteriormente, el cálculo de un índice complejo no es otra cosa que la agregación ponderada de los índices simples de los elementos que componen la muestra. Por tanto, en su cálculo intervienen dos factores básicos: la variable objeto de estudio y la ponderación relativa de cada componente de la muestra (por ejemplo, en el caso del IPC la variable objeto de estudio son los precios de cada uno de los artículos de  la cesta de la compra, y las ponderaciones de cada artículo se calculan de acuerdo con el gasto que los hogares realizan en cada uno de ellos).

Por otra parte, dado que el índice de Laspeyres es la fórmula utilizada por la inmensa mayoría de los indicadores coyunturales, el periodo de referencia de la variable objeto de estudio (sean precios, cantidades o valores) y el de las ponderaciones debe coincidir. En un índice de precios, por ejemplo, el momento de referencia de los precios y de las cantidades debe ser el mismo (se denomina 0 en la fórmula siguiente):

$$I_L = \frac{\sum p_i^t \times q_i^0}{\sum p_i^0 \times q_i^0}$$

Con esta premisa de partida, uno de los temas cruciales cuando se van a utilizar números índices es decidir si la fórmula debe responder a un esquema de base fija o, por el contrario, se va a optar por un sistema de índices encadenados. La diferencia es fundamental: los índices de base fija establecen un periodo base o de referencia de la variable y sus ponderaciones, y lo mantienen fijo a lo largo del tiempo que dure la base implantada (generalmente cinco años), mientras que en un índice encadenado estos periodos de referencia cambian más frecuentemente (generalmente, cada año).

La opción por uno u otro tipo de índices no es inmediata, ya que ambos tienen aspectos a favor y aspectos en contra.

<u>**Base fija**</u>

La estructura de ponderaciones y la composición de la muestra de productos o actividades se mantiene fija a lo largo del tiempo; esto **favorece la comparabilidad temporal,** ya que durante los años en que esté en vigor la base sabemos que el índice mide la evolución de la variable objeto de estudio, sin que venga influido en ningún caso por cambios en los pesos ni en la composición de la muestra.

Sin embargo, con el paso de los años, tanto la estructura de ponderaciones como el contenido de la cesta de productos o actividades que forman parte del índice **van perdiendo representatividad,** ya que cada vez se van alejando más del momento en que se estableció la base (por ejemplo, uno de los artículos de la cesta de la compra del IPC, base 92, cuya fórmula respondía a una base fija, era la máquina de coser, representativa a comienzos de los años 90 pero no tanto en el año 2000, cuando la base estaba llegando a su finalización).

Un ***agregado elemental*** es el componente de más bajo nivel de agregación para el cual se obtienen índices, y en cuyo cálculo no intervienen ponderaciones. La fórmula de cálculo de un índice de base fija para un agregado elemental *i* es la siguiente:

$$ {}_0 I_i^{mt} = \frac{X_i^{mt}}{X_i^0} \, X\ 100 $$

${}_0 I_i^{mt}$ es el índice elemental del agregado *i*, en el mes corriente *m* del año *t* en base 0.

$X_i^{mt}$ es el valor de la variable objeto de estudio (ya sean precios, cantidades o valores) del agregado elemental *i*, en el mes corriente *m* del año *t.*

$\overline{X_i^0}$ es el valor medio de la variable objeto de estudio del agregado elemental *i*, en el año base 0*.*

Un índice elemental se puede obtener aplicando al índice del mes anterior la variación mensual entre el mes corriente y el mes anterior. Es decir:

$$ {}_0I_i^{mt} = \frac{X_i^{mt}}{\overline{X_i^0}} \times \frac{X_i^{m-1t}}{X_i^{m-1t}} \times 100 = {}_0 I_i^{m-1t} \times \frac{X_i^{mt}}{X_i^{m-1t}} $$

Un problema habitual en la mayoría de las estadísticas es el cambio en la composición de la muestra a lo largo del tiempo. Cuando esto sucede, la tasa de variación mensual incorpora tanto la evolución real de la variable como la parte afectada por el cambio de muestra. Para facilitar la comparabilidad temporal, se suele calcular la variación mensual con las unidades comunes entre los dos periodos consecutivos. Es decir:

$$ {}_0I_i^{mt} = {}_0I_i^{m-1t} \times \frac{Y_i^{mt}}{Y_i^{m-1t}} $$

donde $Y_i^{mt}$ e $Y_i^{m-1t}$ es el valor de la variable en las unidades de la muestra comunes entre los meses *m* y *m-1*.

Por tanto, la información utilizada para el cálculo de dos periodos consecutivos *m* y *m-1* no tiene porque proceder de la misma muestra que la utilizada para el cálculo de la tasa entre *m* y *m+1.*

El índice agregado en un indicador de base fija se obtiene como suma ponderada de los índices elementales que lo componen:

$$ {}_0I_A^{mt} = \sum_{\forall i \in A} {}_0I_i^{mt} \times \ {}_0W_i $$

Un inconveniente propio de la utilización de los índices en base fija es lo que se denomina la **autoponderación de los índices**, que consiste en que el peso de cada uno de los componentes de la cesta se ve indirectamente modificado por el nivel que alcance su índice.

Conforme va pasando el tiempo desde el año base, los índices de los componentes van cambiando según la evolución de la variable (aquellos componentes cuya variable haya aumentado más tendrán un índice mayor que otras con evoluciones más discretas); **cuanto mayor sea el valor del índice de un componente respecto al índice general más peso relativo tendrá el componente en el momento de agregarlo para obtener el índice global**.

*Ejemplo sobre la autoponderación de los índices:*

*En la siguiente tabla se muestra el cálculo de un índice general como suma ponderada de los índices de cuatro componente (A, B, C y D). El peso de los cuatro componentes es el mismo, por lo que una variación de un 10% en cualquiera de los componentes debería influir exactamente lo mismo en el índice general. Sin embargo esto no es así:*

- *Supongamos un aumento del componente A de un 10% y que los demás componentes no varían. Así, el índice de A pasa de un nivel de 280 en el mes M del año T a un nivel de 308 en M+1,T (columnas 3 y 5). El efecto en el índice agregado es un aumento del 4,3%.*

- *Supongamos ahora un aumento del componente D de un 10% también y que los demás componentes no varían. El índice de D pasa de 135 a 148,5 (columnas 3 y 6). La variación del índice general es del 2,1%.*

*Vemos que un aumento del 10% en el índice más alto influye más que un aumento del 10% del índice menor. Es decir, el nivel del índice influye en el resultado, lo que se denomina autoponderación.*

| (1) COMPONENTE | (2) INDICES BASE | (3) MES M AÑO T | (4) PONDERACIONES | (5) MES M+1 AÑO T | (6) MES M+1 AÑO T |
|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 100 | 280 | 25 | 308 | 280 |
| **B** | 100 | 123 | 25 | 123 | 123 |
| **C** | 100 | 120 | 25 | 120 | 120 |
| **D** | 100 | 135 | 25 | 135 | 148,5 |
| **ÍNDICE GENERAL** | | 164,5 | | 171,5 | 167,875 |
| | | | | | |
| **TASAS DE VARIACIÓN** | | | | **4,3** | **2,1** |

## Índice encadenado

En este tipo de índices, la estructura de ponderaciones y la composición de la muestra de productos o actividades cambia generalmente cada año. Esto **favorece la representatividad**, ya que el indicador se va adaptando de forma permanente a la realidad económica, pero **va en perjuicio de la comparabilidad temporal**, ya que la evolución estimada de la variable objeto de estudio se ve 'contaminada' por cambios en los pesos o contenido de la cesta de productos o actividades.

Desde el punto de vista de la fórmula general de cálculo, en la práctica su construcción consiste en cambiar la referencia de la variable objeto de estudio y, consecuentemente, también las ponderaciones, cada año. Habitualmente, el periodo de referencia es o bien el mes de diciembre del año inmediatamente anterior al corriente o bien el último trimestre de dicho año.

La expresión matemática de un índice con referencia en el mes de diciembre es la siguiente:

$$ {}_{dict-1}I_G^{mt} = \sum_i {}_{dict-1}I_i^{mt} \times {}_{dict-1}W_i $$

donde:

${}_{dict-1}I_G^{mt}$ es el índice general del mes corriente *m* del año *t* referenciado al mes de diciembre del año *t-1.*

${}_{dic\,t-1}I_i^{mt}$ es el índice del componente elemental *i* de la muestra (índice elemental), en el mes corriente *m* del año *t* referenciado al mes de diciembre del año *t-1.*

${}_{dic\,t-1}W_i$ es la ponderación del elemento *i* referenciada al mes de diciembre del año *t-1.*

El **índice elemental** (índice de cada uno de los componentes elementales de la muestra) se calcula de la siguiente forma:

$${}_{dic\,t-1}I_i^{mt} = \frac{X_i^{mt}}{X_i^{dic\,t-1}}\ X\ 100$$

donde:

${}_{dic\,t-1}I_i^{mt}$ es el índice elemental del componente *i*, en el mes corriente *m* del año *t* referenciado al mes de diciembre del año *t-1.*

$X_i^{mt}$ es el valor de la variable objeto de estudio del componente elemental *i*, en el mes corriente *m* del año *t.*

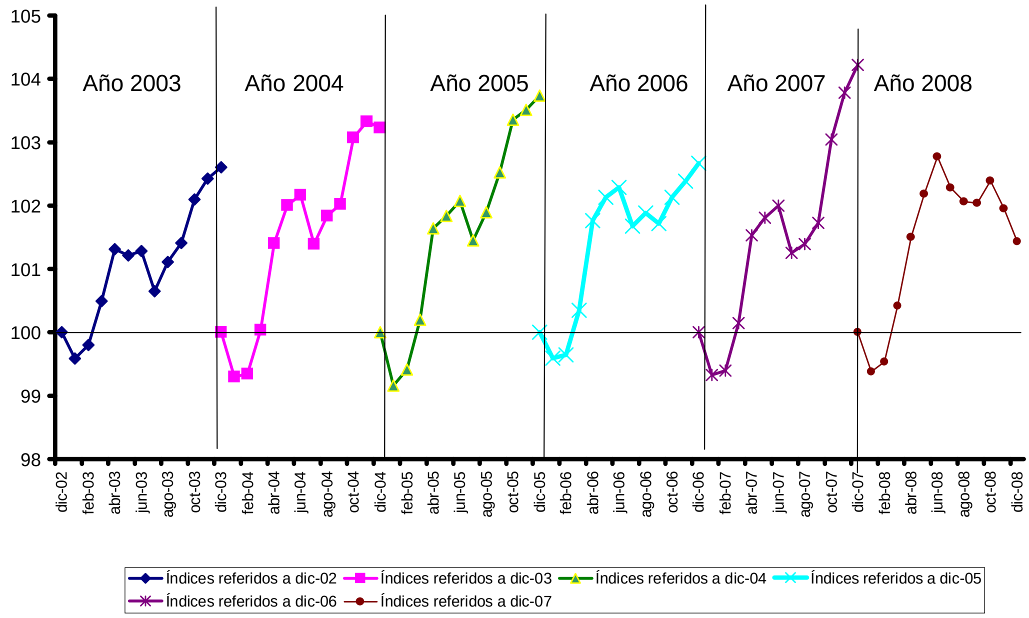
$X_i^{dic\,t-1}$ es el valor de la variable objeto de estudio del componente elemental *i*, en diciembre del año *t-1.*

Como se observa en las fórmulas anteriores, los índices (elementales y agregados) están referenciados a diciembre del año anterior al corriente (t-1). Esto quiere decir que a comienzos de cada año el índice cambia de periodo de referencia, lo que conlleva discontinuidad en las series de índices. Esta es la razón por la que es necesario realizar un **proceso de encadenamiento**, que no es otra cosa que enlazar las series de los índices de cada año para ofrecer una serie continua en el tiempo.

*Ejemplo:*

*El siguiente gráfico muestra el esquema general que suelen seguir los índices antes del proceso de encadenamiento. Supongamos que la base es 2002, y que la serie de la misma comienza en 2003. De acuerdo con las normas del encadenamiento, los índices de los sucesivos años (2003 en adelante) deberían modificarse para dar continuidad a la serie iniciada en 2003.*

***GRÁFICO DE ÍNDICES SIN ENCADENAR***




El proceso de encadenamiento consiste, pues, en cambiar de escala los índices referenciados a diciembre de *t-1* para dar continuidad a la serie de índices que se vienen publicando. En el gráfico anterior, el encadenamiento supondría trasladar cada serie referenciada a diciembre de *t-1* para dar continuidad la serie de índices del año 2003.

La fórmula de encadenamiento consiste en multiplicar a cada índice sin encadenar desde el año 2004 por un coeficiente (coeficiente de encadenamiento). Así, en el año 2004, los índices encadenados se calculan de la siguiente forma:

$$ {}_{2002}IE^{m2004} = {}_{dic2003}I^{m2004} \times \frac{{}_{2002}I^{dic2003}}{100} $$

donde:

${}_{2002}IE^{m2004}$ es el índice encadenado del mes *m* del año 2004.

${}_{dic2003}I^{m2004}$ es el índice sin encadenar referido a diciembre de 2003 del mes *m* del año 2004.

${}_{2002}I^{dic2003}$ es el índice en base 2002 de diciembre de 2003 (último índice publicado en base 2002.

Por tanto, cada año existe un coeficiente de encadenamiento. Generalizando la fórmula, tendremos:

$$ {}_{0}IE^{mt} = {}_{dict-1}I^{mt} \times \frac{{}_{0}IE^{dict-1}}{100} $$

El coeficiente de encadenamiento se expresa como:

$$ {}_{0}C^{t} = \frac{{}_{0}IE^{dict-1}}{100} $$

De manera intuitiva, el proceso de encadenamiento consiste en aplicar la tasa de variación mensual de los índices sin encadenar al último índice publicado. Siguiendo con el ejemplo, si el último índice calculado y publicado en base 2002 es el de diciembre de 2003, a éste habría que aplicarle la tasa de variación del índice sin encadenar de enero sobre diciembre (que es 100 ya que es el mes de referencia), es decir:

$$ {}_{2002}IE^{ene2004} = {}_{2002}IE^{dic2003} \times \frac{{}_{dic2003}I^{ene2004}}{100} $$

Análogamente, el índice de febrero de 2004 se calcula aplicando la tasa de variación de febrero respecto a enero de 2004, medida con los índices sin encadenar, al último índice publicado (encadenado), es decir, enero de 2004:

$$ {}_{2002}IE^{feb2004} = {}_{2002}IE^{ene2004} \times \frac{{}_{dic2003}I^{feb2004}}{{}_{dic2003}I^{ene2004}} = {}_{2002}I^{dic2003} \times \frac{{}_{dic2003}I^{ene2004}}{100} \times \frac{{}_{dic2003}I^{feb2004}}{{}_{dic2003}I^{ene2004}} = $$

$$ = {}_{2002}I^{dic2003} \times \frac{{}_{dic2003}I^{feb2004}}{100} = {}_{dic2003}I^{feb2004} \times \frac{{}_{2002}I^{dic2003}}{100} $$

En la fórmula anterior, vemos que el procedimiento de encadenamiento puede interpretarse de dos formas distintas, aunque complementarias: como la aplicación de la tasa de variación mensual al último índice publicado (encadenado), o como el producto del índice sin encadenar de cada mes por un coeficiente fijo calculado como el índice de diciembre del año inmediatamente anterior medido en la base del indicador, entre 100.

Es preciso indicar que la necesidad de encadenar los índices radica, no solo en disponer de una serie continua  y única de índices sino también en facilitar el cálculo de tasas anuales o de periodos más amplios de tiempo.

Desde el punto de vista de su construcción, los índices encadenados tienen un inconveniente: **son índices no aditivos**. Esto implica que la suma ponderada de los índices de los componentes no da como resultado el índice general. Recordemos que el índice general sin encadenar (es decir, referenciado a diciembre de *t-1*) se obtiene como suma ponderada de los componentes:

$$_{dict-1}I_G^{mt} = \sum_i {}_{dict-1}I_i^{mt} \times {}_{dict-1}W_i$$

En el proceso de encadenamiento cada componente (y los agregados, incluido el índice general) se encadena con su propio coeficiente. Por tanto:

$$_{dict-1}I_G^{mt} \times C_G^t \neq \sum_i {}_{dict-1}I_i^{mt} \times C_i^t \times {}_{dict-1}W_i$$

Esto, sin embargo, no se considera un problema importante ya que los índices sí que son aditivos en el paso previo al encadenamiento.

### 1.5.2 QUÉ ES UN CAMBIO DE BASE

La estructura general de producción de un indicador basado en el cálculo de números índices consta, en líneas generales, de tres grandes apartados:

- Elementos estructurales del indicador
- Contenido metodológico
- Tratamiento de la información

El primero se refiere a aquellos aspectos que conforman los cimientos a partir de los cuales se construirá el sistema en su conjunto. Así, se incluye dentro de este gran apartado aspectos como el **diseño de la muestra** (qué empresas o establecimientos van a informar, o qué municipios van a formar parte de la muestra), la **estructura de ponderaciones** y la composición de los elementos que conforman el indicador (actividades incluidas, productos seleccionados). Una vez definidos estos elementos esenciales, se irán aplicando los distintos instrumentos metodológicos incluidos en el segundo apartado.

En el segundo apartado estarán contenidos los temas relativos a los distintos tratamientos metodológicos; dependiendo de qué tratamiento se elija para cada problema conceptual planteado así se irá definiendo la estructura metodológica del indicador. Componen este apartado el método general de cálculo, algunos tratamientos específicos que difieran de la fórmula general, y cualquier otro aspecto metodológico que sirva de base para el cálculo del indicador.

Por último, en el tercer aspecto que conforma el sistema de producción de un índice se engloban los aquellos elementos relacionados con el propio seguimiento de la variable objeto de estudio (tratamientos de la falta de respuesta, ajustes de los cambios de calidad, y los análisis y métodos de validación de la información).

Cada cierto tiempo, se hace necesaria una revisión y renovación de todos estos aspectos que conforman el cálculo del índice. Esto es lo que se denomina un **cambio de base**.

Si bien es cierto que la revisión es necesaria en todos los aspectos señalados que conforman el cálculo del indicador, lo que habitualmente determina el momento del cambio de base es el grado de pérdida de representatividad de los elementos utilizados en el cálculo del Sistema vigente (las actividades, en el caso de indicadores de actividad, o los productos cuando hablamos de precios) y sus ponderaciones. Por tanto, **un cambio de base es una adaptación del indicador a los cambios acaecidos en la realidad económica que se pretende medir**.

#### 1.5.2.1. PERIODICIDAD DE LOS CAMBIOS DE BASE

La periodicidad con la que se lleva a cabo un cambio de base, en teoría, depende del grado de dinamismo del sector al que se refiera el indicador. Cuanto más rápidos sean los cambios en el mismo, con mayor frecuencia deberían realizarse los cambio de base. En general, en los principales foros internacionales se ha convenido que lo idóneo es realizar un cambio de base cada cinco años (de hecho, el Reglamento del Consejo sobre estadísticas coyunturales así lo estipula).

#### 1.5.2.2. ENLACE DE SERIES

Cuando se realiza un cambio de base se produce una ruptura en la continuidad de las series. La actualización de ponderaciones, los cambios en la composición de la muestra y especialmente, los cambios metodológicos, hacen que la serie nueva difiera de la antigua. Estas diferencias, desde el punto de vista teórico son insalvables. No obstante, la necesidad de disponer de series continuadas por parte de los usuarios ha hecho necesario el cálculo de unos coeficientes de enlace que unan las series publicadas en base antigua con las series en base nueva.

Consideremos dos periodos base distintos a los que denominaremos *0* y *0'*. Cada uno de ellos representa el periodo base de un mismo indicador (puede ser el IPC, por ejemplo) en bases contiguas, de forma que *0<0'*.

Si partimos de un momento corriente *t*, los índices en una base y en otra se denotan como:

${}_{0}I^{t}$ es el índice en el momento *t* medido en base *0*

${}_{0'}I^{t}$ es el índice en el momento *t* medido en base *0'.*

Un coeficiente de enlace *K* se calcula como cociente de ambos índices:

$$K = \frac{{}_{0'}I^{t}}{{}_{0}I^{t}}$$

Por su concepción, este coeficiente tiene la particularidad de trasladar los índices en base antigua *0* a la nueva base *0'*:

$$K \times {}_{0}I^{t} = {}_{0'}I^{t}$$

Análogamente, se puede transformar un índice en base nueva *0'* a base antigua *0*:

$$K' = \frac{{}_{0}I^{t}}{{}_{0'}I^{t}} \qquad K' \times {}_{0'}I^{t} = {}_{0}I^{t}$$

***Ejemplo. Aplicación de los coeficientes de enlace en el cambio de base del IPC 2001***

Con la entrada en vigor de la base 2001 del IPC, en el año 2002, hubo que realizar un enlace de las series de índices que se iniciaban en la nueva base con la publicada hasta entonces, cuya base era 1992=100.

Como en otros cambios de Sistema, el INE calculó los denominados **coeficientes de enlace legal** para las distintas desagregaciones funcionales y geográficas.

El enlace legal recibe este nombre porque tradicionalmente el INE lo aplicaba en sus certificaciones oficiales, y se obtiene como cociente entre el índice de diciembre de 2001, en base 2001 (base nueva) y, el índice para el mismo período en base 1992 (base antigua):

$$C_L^{92/01} = \frac{{}_{01}I^{dic01}}{{}_{92}I^{dic01}}$$

donde:

${}_{01}I^{dic01}$ es el índice de diciembre de 2001, en base 2001.

${}_{92}I^{dic01}$ es el índice de diciembre de 2001, en base 1992.

Una vez calculado, se multiplica cada uno de los índices ya publicados en la base antigua (base 92) por el coeficiente de enlace para *transformarlos* a base nueva (base 2001).

En general cuando se realiza un enlace como este, las ventajas son:

- Se consigue una continuidad en la serie que se viene publicando, ya que todos los índices publicados con anterioridad al cambio de base se transformarán a términos de la nueva base.

- Se mantienen todas las tasas de variación (anuales, acumuladas y mensuales) publicadas en la base antigua.

- La tasa mensual del índice en el momento de transición de un sistema a otro (diciembre de 2001 a enero 2002) es la calculada con el nuevo Sistema.

Algunas consecuencias del procedimiento de enlace de series.

- Los coeficientes de enlace se obtienen de forma independiente para cada una de las series de índices que tienen continuidad en la nueva base, lo cual implica que cualquier índice agregado de una serie enlazada no es el resultado de la media ponderada de los índices elementales que lo componen.

- Aunque el nuevo Sistema tiene como característica principal que la media de los índices referidos al año base medidos en dicha base son igual a 100, los índices que se publican en dicho año están calculados en la base antigua y, por tanto, las series enlazadas pueden no tener media 100.

- El coeficiente legal es multiplicativo, es decir, el coeficiente que enlaza períodos no consecutivos se obtiene como producto de los coeficientes de enlace de los sistemas consecutivos comprendidos en dicho período. Así, el coeficiente de enlace entre los sistemas 1968 y 2001, se calcula del siguiente modo:

$$C_L^{68/01} = C_L^{68/76} \times C_L^{76/83} \times C_L^{83/92} \times C_L^{92/01}$$

La utilización de los coeficientes de enlace legal está justificada en la medida en que mantiene las tasas ya publicadas del indicador. Sin embargo, es preciso hacer notar que su filosofía consiste en presuponer que la relación de la base nueva y la antigua está perfectamente representada a través de la relación de ambas en el periodo utilizado como enlace. Evidentemente, si dicho periodo es atípico por cualquier razón (precios excesivamente altos en una de las dos bases, por ejemplo) entonces no es correcto circunscribir dicha relación al resto de la serie.

Por ello, metodológicamente es más correcto utilizar el coeficiente de enlace estructural, que utiliza medias de índices de periodos mas o menos largos como periodo de enlace (en el caso del IPC, un año). En el IPC, base 2001, el coeficiente de enlace estructural se obtiene como cociente del índice medio del año base 2001 en base 2001 y, el índice medio para el mismo año en base 1992. El primer índice medio, por definición, es igual a 100. Por tanto, el coeficiente de enlace estructural se calcula como sigue:

$$C_E^{92/01} = \frac{\sum_{m=1}^{12} {}_{01}I^{m01}}{\sum_{m=1}^{12} {}_{92}I^{m01}} = \frac{100}{\sum_{m=1}^{12} {}_{92}I^{m01}}$$

donde:

${}_{01}I^{m01}$ es el índice del mes *m* de 2001, en base 2001.

${}_{92}I^{m01}$ es el índice del mes *m* de 2001, en base 1992.

La principal ventaja de este enlace es la ampliación del período de solapamiento entre las dos bases siendo todo el año 2001 y no el mes de diciembre, como sucede con el enlace legal.

El inconveniente que presenta la serie enlazada a través del coeficiente de enlace estructural (respecto a la enlazada con el coeficiente legal) es que puede que no mantenga las tasas en períodos cortos que incluyan el momento de transición.

1.5.3. CÁLCULO DE LAS TASAS DE VARIACIÓN

El fin último para el que se utilizan los números índices es el cálculo de tasas de variación que permita realizar un seguimiento de la variable objeto de estudio (ya sean precios, cifra de negocios o cantidades) a lo largo del tiempo.

El cálculo de la tasa de variación de un índice en dos situaciones distintas *t* y *t'*, con *t'*<*t* se realiza de la siguiente forma:

$$V_i^{t,t'} = \frac{I_i^t - I_i^{t'}}{I_i^{t'}} \times 100$$

A partir del índice de un periodo, utilizando la tasa de variación, se puede obtener el otro índice:

$$I_i^t = I_i^{t'}\left(1 + V_i^{t,t'}\right),$$

si la variación se expresa en tanto por uno.

Las tasas de variación utilizadas más habitualmente por la mayoría de los indicadores coyunturales son la **mensual** (variación entre dos meses consecutivos), la **acumulada** (variación entre el mes corriente y el mes de diciembre del año anterior), **variación de la media en lo que va de año** (es la variación entre la media de los índices desde enero al mes corriente y la media de índices del mismo periodo del año anterior) y la **variación anual** (variación entre el mes corriente y el mismo mes del año anterior).

### 1.5.4. CÁLCULO DE LAS REPERCUSIONES

La variación de un índice agregado viene determinada por el comportamiento de sus componentes. Así, cuanto mayor sea la variación del índice de un elemento, mayor será su influencia en el agregado. Pero, además, ante tasas de variación iguales entre distintos componentes, tendrá mayor influencia en el agregado aquella que lleve asignada una mayor ponderación. Esta idea intuitiva se formaliza mediante el concepto de *repercusión.*

La repercusión que la variación de un elemento o conjunto de elementos tiene en la variación de un índice agregado entre dos periodos *m* y *m'*, es la variación que éste hubiera experimentado si solo hubiera variado dicho elemento o conjunto de elementos. Es decir, la repercusión es la variación del índice agregado debida únicamente a la variación en uno de sus componentes.

Su fórmula es la siguiente:

$$R_i^{m,m''} = \frac{I_i^m - I_i^{m'}}{I^{m'}} \times W_i \times 100$$

donde,

$R_i^{m,m''}$ es la repercusión del elemento *i* en el agregado.

$I_i^m$ es el índice del componente *i* en el momento *m*

$I_i^{m'}$ es el índice del componente *i* en el momento *m’*.

$W_i$ es la ponderación del componente *i* en tanto por uno.

$I^{m'}$ es el índice del agregado en el momento *m’*.

Una propiedad fundamental que surge de la propia definición de la repercusión es que la suma de las repercusiones de los componentes es la tasa de variación del agregado. Esto aporta una información muy valiosa a la hora de analizar el comportamiento de cualquier índice, como complemento del estudio de las tasas de variación.

En los índices calculados siguiendo la fórmula de base fija esto es así para todos los tipos de variaciones. Sin embargo, esto no siempre es así en los índices encadenados: dado que cada año los índices deben encadenarse con coeficientes de encadenamiento diferentes, la suma de las repercusiones anuales no es igual a la tasa anual (que se obtiene utilizando índices encadenados).

1.5.5. CÁLCULO DE LA PARTICIPACIÓN

Algunos autores se refieren al concepto de *participación* como el cociente entre la repercusión de cada índice componente y la variación total:

$$P_i^{m,m''} = \frac{R_i^{m,m'}}{V^{mm'}} \times 100$$

La interpretación de los resultados hay que hacerla con cuidado, ya que la sólo tendría sentido su utilización como porcentaje de la variación total cuando todas las variaciones de los componentes fuesen en la misma dirección (todas positivas o todas negativas).

Además, si la variación global fuese nula debido a que sus dos elementos hubiesen experimentado variaciones de +50% y de –50%, respectivamente, no tendría sentido dividir las repercusiones entre cero.